

スーパーコンティニュームスクイズド光の周波数域光子数相関計測

Measuring the Frequency-Mode Photon Number Correlation of a Squeezed Supercontinuum Light

新村星太郎 (B4), 保坂有杜 (D2), 富田雅也 (M1), 大見聡仁 (B4)

Shintaro Niimura, Aruto Hosaka, Tomita Masaya, Akihito Omi

Abstract

We acquire a squeezed mode from the supercontinuum light, generated through a photonic crystal fiber. Supercontinuum is known to have a trade-off relationship between its wide frequency spectrum and its coherence. Eigenvalue-decomposing the covariance matrix results in new modes of different basis and produces new insights on low-noise supercontinuum light.

1. はじめに

フェムト秒レーザーとは、フェムト領域のパルス幅を持つパルスレーザーである。パルス幅がフェムト秒領域にあるということは、それだけ広い周波数スペクトルを有していることになる。広い周波数スペクトルを持った光が短時間で通過することは、早い現象や広い周波数域を必要とした現象などに役立つ、様々な分野の基盤技術となった。その中でも、広帯域性をさらに伸ばそうとした研究にスーパーコンティニューム発生がある。

スーパーコンティニューム発生とは、比較的狭帯域なパルスが非線形効果により周波数域で広帯域化する現象のことを指す。1970年に Alfano と Shapiro[1]らによってはじめて報告された。当時はスーパーコンティニュームという名前はまだなく、

従来の広帯域化よりも10倍も広い帯域の光を得ることができたことから注目を浴びた。それ以降、スーパーコンティニューム光の様々な発生方法が研究され、Alfano と Shapiro らと全く異なるフォトニック結晶ファイバー(PCF)を用いてスーパーコンティニューム光の発生が Lin と Stolen らによって確認され[2]、発生原理の物理はほとんど説明されている[3]。そして、その広帯域な性質から、スーパーコンティニューム光は周波数コム計測[4]、光干渉断層撮影[5]や光通信[6]などで応用されている。これらの応用先において重要となる指標の一つがコヒーレンスである。近年の研究[7]により、スーパーコンティニューム光のコヒーレンスは周波数スペクトル広がりとのトレードオフな関係であることが報告されている。

本研究の目的としては、スーパーコンティニューム光のコヒーレンスと広帯域化のトレードオフな関係を、我々の研究室が従来行っていた周波数モード解析という量子論的アプローチと組み合わせることで、量子限界以下の光子数ノイズを持つ光子数スクイズド光が生成されることを示す。

2. 原理

2.1. スクイズド状態

ある演算子を以下のように定義する：

$$\hat{b} = \mu\hat{a} + \nu\hat{a}^\dagger \quad (|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1) \quad (1)$$

この演算子の固有状態をスクイズド状態と定義する。また、消滅・生成演算子からこの演算子への変換を Bogoliubov 変換という。逆に、任意の演算子が消滅・成演算子の Bogoliubov 変換であるということを示せれば、その演算子の固有状態はスクイズド

状態となる。また、スクイズド状態とは、詳細な計算過程によると、不確定性原理に基づいた位置と運動量の不確定性関係の内どちらか一方が量子限界を超えて小さくなり、もう一方がその代わり大きくなっている状態を示している。それは Fig. 1 のように表現される。

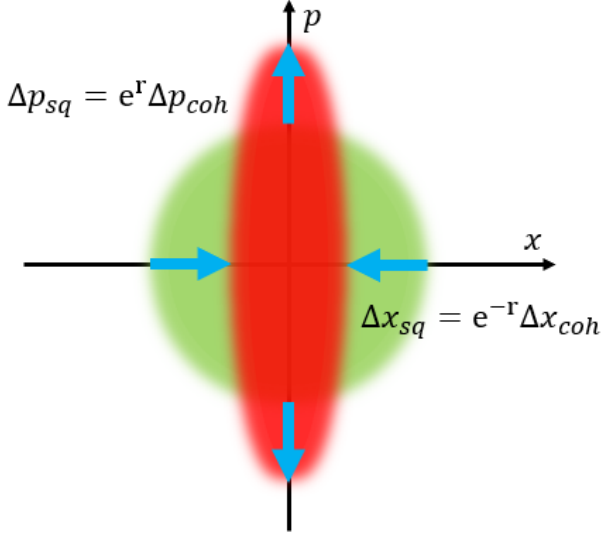


Fig. 1 The picture of a Squeezed State on a position and momentum basis. The green circle shows the coherent state of the light, and the red oval shows the squeezed state of the light.

フェムト秒パルスを入射する光ファイバーに入射することで、自己位相変調効果が発生し、三次の非線形光学効果が観測される。この三次の非線形光学効果の過程では、Bogoliubov 変換が起きており、スクイズド状態が生成される。

2.2. 共分散行列

理想に近い量子力学的測定を可能とするのが、バランス型ホモダイン測定である。その原理図は以下のようなになる。

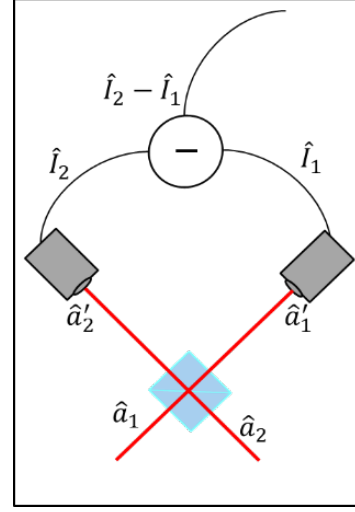


Fig. 2 A Balanced Homodyne Experiment. Two states of light enter the beam splitter and the outgoing two beams are measured by the photodiode. The measurements are then subtracted to give a homodyne measurement.

Fig. 2 において、それぞれの検出器では、

$$\hat{I}_1 = \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}'_1 = \frac{1}{2} (\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 - \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger}) \quad (2)$$

$$\hat{I}_2 = \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}'_2 = \frac{1}{2} (\hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_1 + \hat{a}_2^{\dagger} \hat{a}_2 + \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger}) \quad (3)$$

と測定されていて、バランス型ホモダイン測定ではこれらの差を求めているので、最終的に測定されるのは、

$$\hat{I}_2 - \hat{I}_1 = \hat{a}_1^{\dagger} \hat{a}_2 + \hat{a}_1 \hat{a}_2^{\dagger} \quad (4)$$

の演算子となる。[8]

一方の入力状態を実部と虚部に分けることを考えてみると、例えば、 $\hat{a}_1 = \hat{w}_x + i\hat{w}_p$ として考えると、(2.53)式は

$$\begin{aligned} \hat{I}_2 - \hat{I}_1 &= (\hat{w}_x - i\hat{w}_p) \hat{a}_2 + (\hat{w}_x + i\hat{w}_p) \hat{a}_2^{\dagger} \\ &= \hat{w}_x (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^{\dagger}) + \frac{\hat{w}_p (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^{\dagger})}{i} \end{aligned} \quad (5)$$

となり、 $\hat{a}_2 = \hat{x} + i\hat{p}$ として考えると、

$$\hat{I}_2 - \hat{I}_1 = \hat{w}_x \hat{x} + \hat{w}_p \hat{p} \quad (6)$$

となる。フォトダイオードでは測定されるのがパワーなので、この二乗値の平均値が得られる値である。

さらに、マルチモードに拡張した場合においては、測定値を V とし、得られた式を行列で表すとすると、

$$V = \mathbf{f}^T \mathbf{C} \mathbf{f} \quad (7)$$

として表される。このとき、 \mathbf{C} を共分散行列と呼び、モード間の量子相関を示している。例えば、単一モードにおける共分散行列は以下のように表される。

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$c_{11} = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 \quad (9)$$

$$c_{12} = \frac{1}{2} \langle \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle \quad (10)$$

$$c_{21} = \frac{1}{2} \langle \hat{x} \hat{p} + \hat{p} \hat{x} \rangle - \langle \hat{x} \rangle \langle \hat{p} \rangle \quad (11)$$

$$c_{22} = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 \quad (12)$$

単一モード \hat{a}_1 をコヒーレント状態と考えた時、 $\hat{w}_x = |\alpha| \cos \theta$, $\hat{w}_p = |\alpha| \sin \theta$ として表すことができる。Nモードのコヒーレント状態ではそれぞれのモードについて、振幅強度 $|\alpha|$ と位相 θ が存在することになる。単一モードの時は位相 θ を適切調整することで、位置と運動量のどちらかの値を測定することが可能であったが、マルチモードの場合では、それぞれのモードごとに適切な位相 θ が存在して、一律に全てのモードの位置あるいは運動量を測定することができない。ノイズレベル V が最小となるような位相 θ を求めることで、初めて単一モードと同様な測定ができる。この最適な位相 θ を求める方法は、単純に共分散行列を対角化すれば得られる。一般的な対角化手法としてはウィリアムソンの定理 [9] があげられるが、単純に位置と運動量が互いに独立していて相関がない場合は、固有値分解で十分対角行列が得られる [10]。共分散行列を対角化した結果、得られるノイズレベルの式は、

$$V = \mathbf{f}^T \mathbf{S}^T \mathbf{C}' \mathbf{S} \mathbf{f} \quad (13)$$

となる。

このとき、ウィリアムソンの定理を用いた場合、 \mathbf{S}

はシンプレクティック行列を表しており、これはベクトル \mathbf{f} を正準交換関係が満たされている別のベクトルへの写像を意味している。一方で、固有値分解を行った場合、 \mathbf{S} はその固有値ベクトルが並んだ固有値行列を表していて、ベクトル \mathbf{f} にユニタリー変換を施している。また、対角化行列 \mathbf{C}' の対角成分 Λ は固有値を表していて、非対角成分は全て値を持たない。同様なことはウィリアムソン定理で用いた場合でも言えて、非対角成分は2モード間の量子相関を表していることから、対角化とは複雑に相関を持った複数のモードをそれぞれ互いに独立なモードへと変換している。すなわち、対角化によって新しく生じる行列 $\mathbf{S}\mathbf{f}$ の列ベクトルは、それぞれ独立なモードを表している。行列 $\mathbf{S}\mathbf{f}$ のそれぞれの列ベクトルに合わせて位相 θ を決めることで、多モード内に存在する独立したモードの位置あるいは運動量が求められる。また、対角行列 \mathbf{C}' の対角成分にはそのモードでの位置あるいは運動量の値を示している。以上から、共分散行列を求め、その固有値分解あるいはウィリアムソンの定理を行えば、多モードにおけるスクイズド状態の位置と運動量、すなわち、スクイーディングレベルとアンチスクイーディングレベルが求まる。

3. 実験の構築

3.1. 共分散行列の取得

共分散行列の取得方法は Leuchs らによる 2002 年の Review で説明されている [11]。ある周波数モード k における光子数演算子 \hat{n}_k とした場合、その位置演算子 \hat{x}_k と運動量演算子 \hat{p}_k を用いて、以下のようにまとめられる。

$$\hat{n}_k = \frac{1}{2} (\hat{x}_k^2 + \hat{p}_k^2 - 1) \quad (14)$$

よって、平均光子数は、

$$\langle \hat{n}_k \rangle = \frac{1}{2} (\langle \hat{x}_k^2 \rangle + \langle \hat{p}_k^2 \rangle - 1) \quad (15)$$

で表されることになる。

そして、二つの周波数モード間における光子数の掛け算は、

$$\langle \hat{n}_k \hat{n}_l \rangle = \frac{1}{4} (\langle \hat{x}_k^2 \hat{x}_l^2 \rangle + \langle \hat{x}_k^2 \hat{p}_l^2 \rangle + \langle \hat{p}_k^2 \hat{p}_l^2 \rangle + \langle \hat{p}_k^2 \hat{x}_l^2 \rangle - \langle \hat{x}_k^2 \rangle - \langle \hat{p}_k^2 \rangle - \langle \hat{x}_l^2 \rangle - \langle \hat{p}_l^2 \rangle + 1) \quad (16)$$

となる。一方で、分散行列として、以下のものを定義する。

$$V_{\mu k, \mu' k'} = \frac{1}{2} \langle \{(\mu_k - \overline{\mu}_k), (\mu'_{k'} - \overline{\mu}'_{k'})\} \rangle \quad (17)$$

ただし、 $\mu = x \text{ or } p$ であり、 $\{\dots\}$ は反交換子 $\{A, B\} = AB + BA$ 、 $\overline{\mu}_k$ は k モードにおける μ の平均を表している。Leuchs ら[1]より、以下の関係式が導き出されている。

$$\langle \hat{\mu}_k \rangle = \overline{\mu}_k \quad (18)$$

$$\langle \hat{\mu}_k^2 \rangle = \overline{\mu}_k^2 + V_{\mu k, \mu k} \quad (19)$$

$$\langle \hat{\mu}_k^4 \rangle = \overline{\mu}_k^4 + 6\overline{\mu}_k^2 V_{\mu k, \mu k} + 3V_{\mu k, \mu k}^2 \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \langle \{\hat{\mu}_k, \hat{\mu}'_{k'}\} \rangle = \overline{\mu}_k \overline{\mu}'_{k'} + V_{\mu k, \mu' k'} \quad (21)$$

これら四式を組み合わせ、(15)式と(16)式を用いた共分散

$$\text{cov}(n_k, n_l) \equiv \langle n_k n_l \rangle - \langle n_k \rangle \langle n_l \rangle \quad (22)$$

は、

$$\begin{aligned} \text{cov}(n_k, n_l) &= \overline{x}_k \overline{x}_l V_{xk, xl} + \overline{x}_k \overline{p}_l V_{xk, pl} + \overline{p}_k \overline{x}_l V_{pk, xl} \\ &+ \overline{p}_k \overline{p}_l V_{pk, pl} + \frac{1}{2} (V_{xk, xl}^2 + V_{xk, pl}^2 \\ &+ V_{pk, xl}^2 + V_{pk, pl}^2) - \frac{\delta_{kl}}{4} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。また、 $\Delta n_k^2 \equiv \text{cov}(n_k, n_k)$ とし、共分散行列は以下のように定義されている。

$$C_{kl} = \frac{\text{cov}(n_k, n_l) - \delta_{kl} \langle n_k \rangle}{\sqrt{\Delta n_k^2 \Delta n_l^2}} \quad (24)$$

Δn_k^2 の定義式からさらに以下のようなことが言える。

$$(\Delta n_k + \Delta n_l)^2 = \Delta n_k^2 + \Delta n_l^2 + 2\text{cov}(n_k, n_l) \quad (25)$$

これは周波数モード k, l を増やしても同様なことが言えて、

$$\left(\sum \Delta n_i \right)^2 = \sum \Delta n_i^2 + \sum_{i,j} \text{cov}(n_i, n_j) \quad (26)$$

すなわち、

$$\sum_{i,j} \text{cov}(n_i, n_j) = \left(\sum \Delta n_i \right)^2 - \sum \Delta n_i^2 \quad (27)$$

である。本研究では、(27)式の左辺をホモダイナミクス測定におけるスペクトルアナライザのノイズ計測で取得し、右辺を解析していくアプローチをとる。

3.2. 光学系とフーリエ面でのナイフエッジ周波数フィルタリング

共分散行列を取得するためには、周波数ごとにそれぞれ独自に取得するショットノイズと、複数の周波数間の合計ノイズ量である光子数相関の計測が必要となる。

周波数モードを定義するためには、広帯域なスーパーコンティニュームのスペクトルを分割する必要がある。そのためには4f光学系を用いて、フーリエ面を作り、そのフーリエ面で特定の周波数を任意にカットできるようにすればよい。フーリエ面を作成するためにはグレーティングを採用し、フーリエ面に分布した周波数成分を空間的にカットするために自動ステージとナイフエッジを用いた。自動ステージは μm の単位までの精度で移動が可能であり、かつ、プログラマブルである。

本研究で用いた光源は、Spectra Physics社製のモードロック Ti:Sapphire レーザーMaiTai HP である。また、スーパーコンティニューム発生には、NL-PM-750の偏光保持ファイバを用いた。実験系を Fig. 3 に示す。

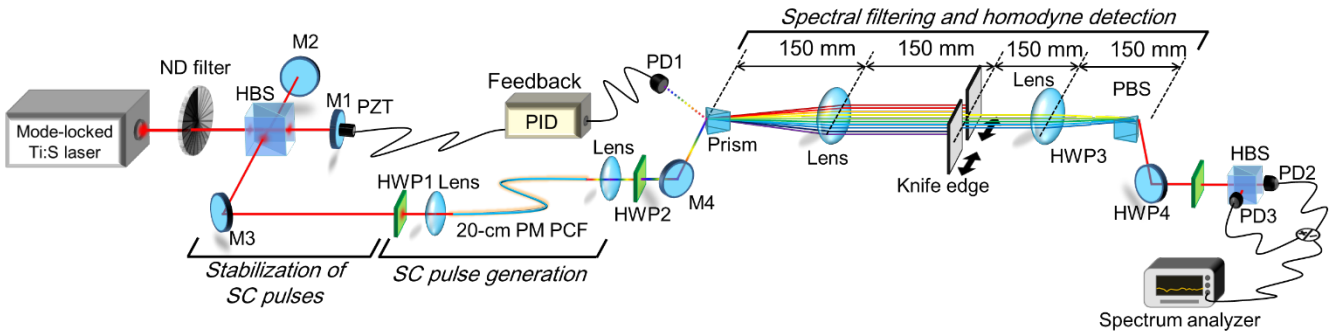


Fig. 3 The experimental setup for earning a covariance matrix of the supercontinuum. The light from the Mode-locked Ti:S laser enters a Michelson Interferometer, in which a Piezo Mirror is feedbacked by the photodiode 1(PD1), enabling a stable power induced into the Polarized Maintained-Photonic Crystal Fiber(PM-PCF). HBS, Half Beam Splitter; HWP, Half Wave Plate; M, Mirror; ND-filter, Neutral Density filter; PZT, Piezo Electric Actuator.

共分散行列取得の実験はナイフエッジの移動とデータ取得をひたすら繰り返す測定である。求める分割数を N としたとき、 $1 \sim N$ の分割をナイフエッジで一つも取り除くことなく測定した結果を $R \{1,2,3, \dots, N\}$ として表す。実験は以下の手順で行っていった。

まず、ナイフエッジをそれぞれの分割だけが通過するように動かしていく。すなわち、 $R \{1\}$ 、 $R \{2\}$ 、 $R \{3\}$...、 $R \{N\}$ をスペクトラムアナライザーで測定する。ただし、スペクトラムアナライザーではバンドスパンが 0 Hz、測定時間を 10s と設定した。このとき、ホモダインでは、引き算を行っており、それぞれの分割のショットノイズを計測していく。

次に、全開放状態 $R \{1,2,3, \dots, N\}$ のノイズレベルをスペクトラムアナライザーで測定する。このとき、ホモダイン測定は足し算になっており、複数の周波数モードが互いに混ざった状態の光子数測

定を行う。そして、ナイフエッジの一方を動かして、一分割分をカットする。つまり、得られる結果は $R \{1,2,3, \dots, N-1\}$ である。続けて、一方のナイフエッジを毎回一分割分のフーリエ面がカットされる方向に動かして、 $R \{1,2\}$ が得られるまで測定を繰り返していく。

次に、もう一方のナイフエッジを一分割分フーリエ面がカットされる方向に動かして、今まで移動していたナイフエッジは一端一切カットしない位置まで移動する。このとき測定される結果は $R \{2,3, \dots, N\}$ である。再び元に戻したナイフエッジを移動していき、先ほどと同様な手順で $R \{2,3, \dots, N-1\}$ 、 $R \{2,3, \dots, N-2\}$ と次々に測定していく。この一連の作業を繰り返していくことで、最終的には $R \{N-1, N\}$ の結果が得られ、そこで共分散行列に必要なデータが全て揃う。得られたデータを連立方程式で解いていけば、共分散 $\text{cov}(n_i, n_j)$ を取得できる。

4. 実験結果

4.1. 15mW の共分散行列

ファイバ出射時のパワーが 15 mW の共分散行列を取得した。測定した RF 周波数は 20MHz であり、ホモダインとしては二つのフォトダイオードをハイブリッドジャンクション HYB2CA を用いた。さらに、80 MHz の繰り返し周波数をカットするために 19.2~23.6 MHz のバンドパスフィルタ SBP-21.4+ を用い、信号を増幅させるために低ノイズアンプ

SA230-F5 を用いた。15 mW 時のスペクトルは Fig.4 である。

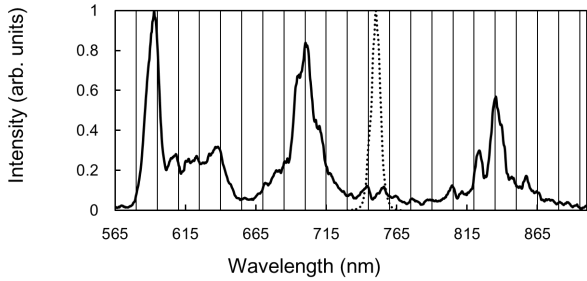


Fig.4 The wavelength spectrum of the supercontinuum light. The dashed lines show the input light's frequency spectrum. The vertical lines show the division of the spectrum.

Fig.4 において、得られたスペクトルを 19 分割できることがわかる。この分割で共分散行列を取得すると、Fig. 5 となる。

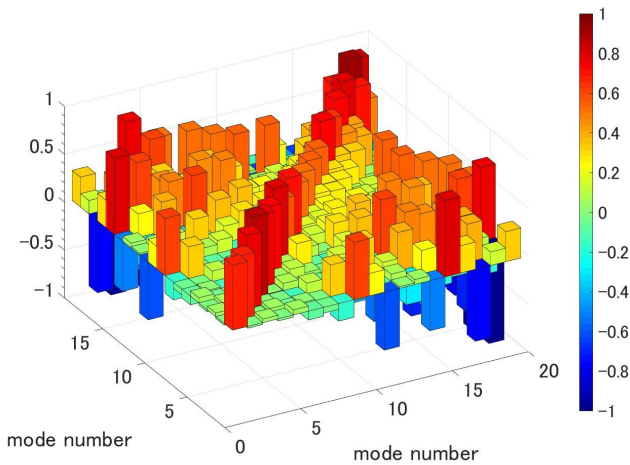


Fig. 5 The covariance matrix of the supercontinuum light at a power of 15 mW. The vertical axis is the value of the covariance matrix's element.

Fig. 5 を見ると、光子数のゆらぎを表す対角成分は強い値を示していることがわかる。先行研究で述べられているように、広帯域化に伴い光がインコヒーレントになるという性質が確認できることになる。比較対象として、ファイバー出射時のパワーが 5 mW の共分散行列を取得した結果が Fig. 6 である。

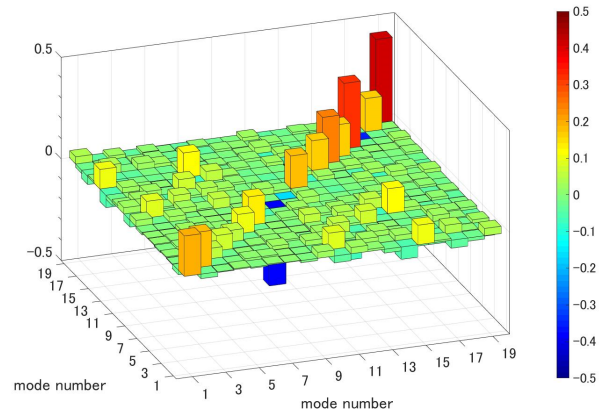


Fig. 6 The covariance matrix of the supercontinuum light at a power of 5 mW. Notice that the diagonal elements have values smaller than that of the 15 mW.

4.2. 共分散行列の固有値分解

共分散行列を固有値分解することで新しいモードが選択される。そして、同時に得られた対角行列の対角成分はそれぞれのモードのスクイー징レベルを表す。MATLAB による固有値分解計算を用いて、15 mW 時の共分散行列から新しいモードを取得した。そのノイズレベルが以下の Fig. 7 にまとめられている。

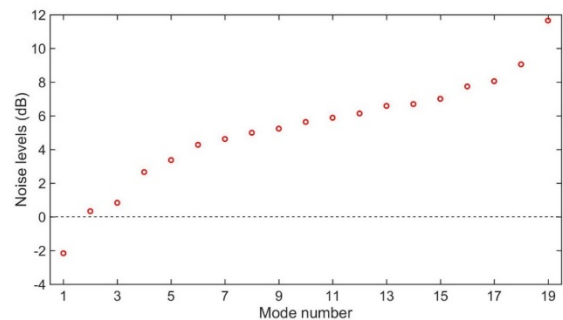


Fig. 7 The noise levels of the new modes derived from the eigenmode decomposition of the covariance matrix. The horizontal line at 0dB signifies the quantum limit, in other words the noise level at a coherent state.

Fig. 7 から量子限界を超えて-2.16dB のノイズレベルを持ったモードが存在することが確認できる。先行研究が述べているようなスーパーコンティニューム光のインコヒーレント、すなわち、高ノイズな

特性は共分散行列から同様に確認できるが、適切なモード分解を行えば、量子的ゆらぎよりさらに低ノイズを持った光が実は存在することがわかる。

5. 結論

本研究では、高ノイズとして考えられてきたスーパーコンティニューム光を量子論に基づいたモード解析から議論し、適切な周波数モードを選択すれば、量子ノイズ以下のスクイズド状態が生成されることを実証した。実際に、このような光源を利用するためには、スクイズド状態にあるモードの周波数スペクトルに対応したゲインをスーパーコンティニューム光に加えることが考えられる。ただし、波形整形器やフィルターなどを用いると、ロスを考慮する必要があるため、量子性が失われる可能性がある。より深く議論するためには、入射パルスのパワーに対する共分散行列やパルス幅に対する共分散行列など、パラメータを変えていったときにスクイーミングにどのような変化を及ぼすのかが今後の議題として上げられる。

References

- [1] R. R. Alfano, S. L. Shapiro, “Emission in the region 4000 to 7000 Å via four-photon coupling in glass,” *Phys. Rev. Lett.* **18**, 584-587(1968).
- [2] C. Lin, R. H. Stolen, “New nanosecond continuum for excited-state spectroscopy,” *Appl. Phys. Lett.* **28**, 216-218(1976).
- [3] J. M. Dudley, G. Genty, S. Coen, “Supercontinuum generation in photonic crystal fiber,” *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1135-1184 (2006).
- [4] S. A. Diddams, D. J. Jones, J. Ye, S. T. Cundiff, J. L. Hall, J. K. Ranka, R. S. Windeler, R. Holzwarth, T. Udem, T. W. Hänsch, “Direct link between microwave and optical frequencies with a 300 THz femtosecond laser comb,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5102-5105(2000).
- [5] I. Hartl, X. D. Li, C. Chudoba, R. K. Ghanta, T. H. Ko, J. G. Fujimoto, J. K. Ranka, R. S. Windeler, “Ultrahigh-resolution optical coherence tomography using continuum generation in an air-silica microstructure optical fiber,” *Opt. Lett.* **26**, 608-610(2001).
- [6] H. Takara, T. Ohara, K. Mori, K. Sato, E. Yamada, Y. Inoue, T. Shibata, M. Abe, T. Morioka, K. I. Sato, “More than 1000 channel optical frequency chain generation from single supercontinuum source with 12.5 GHz channel spacing,” *Electron. Lett.* **36**, 2089-2090(2000).
- [7] G. Genty, M. Surakka, J. Turunen, and A. T. Friberg, “Complete characterization of supercontinuum coherence properties,” *J. Opt. Soc. Am. B* **28**, 2301-2309(2011).
- [8] 古澤明, 量子光学と量子情報科学 (数理出版, 2005).
- [9] G. Adesso, S. Ragy, A. R. Lee, “Continuous variable quantum information: Gaussian states and beyond,” *Open Syst. Inf. Dyn.* **21**, 1440001(2014).
- [10] 保坂有杜, “スクイズド光パルス内の周波数間量子相関解析,” 慶應義塾大学院修士論文 (2015).
- [11] T. Opatrny, N. Korolkova, G. Leuchs, “Mode structure and photon number correlations in squeezed quantum pulses,” *Phys. Rev. A.* **66**, 053813(2002).